1) α] Δίνονται τα ενδεχόμενα A, B, Γ, με πιθανότητες:

$P(A) = 0,48$, $P(B) = 0,4$, $P(\Gamma) = 0,56$
$P(A \cap B) = 0,2$, $P(B \cap \Gamma) = 0,23$, $P(A \cap \Gamma) = 0,43$, $P(A \cap B \cap \Gamma) = 0,15$

Να υπολογισθούν οι πιθανότητες να: i) συμβεί τουλάχιστον ένα από τα A, B, Γ, ii) συμβούν τουλάχιστον δυο από τα A, B, Γ, iii) συμβεί ακριβώς ένα από τα A, B, Γ, iv) συμβούν ακριβώς δυο από τα A, B, Γ.

Λύση

i) Η πιθανότητα να συμβεί τουλάχιστον ένα από τα A, B, Γ, εκφράζεται ως $P(A \cup B \cup \Gamma)$, με:

$P(A \cup B \cup \Gamma) = P(A) + P(B) + P(\Gamma) + P(A \cap B \cap \Gamma) - P(A \cap B) - P(B \cap \Gamma)$
$- P(A \cap \Gamma) = 0,48 + 0,4 + 0,56 + 0,15 - 0,2 - 0,23 - 0,43$
$= 0,73 \rightarrow 73\%$ (δες το $A \cup B \cup \Gamma$ ως $\Delta \cup \Gamma$, με $\Delta = A \cup B$).

ii) Η πιθανότητα να συμβούν τουλάχιστον δυο από τα A, B, Γ, εκφράζεται ως $P((A \cap B) \cup (B \cap \Gamma) \cup (A \cap \Gamma))$, με:

$P((A \cap B) \cup (B \cap \Gamma) \cup (A \cap \Gamma)) = P(A \cap B) + P(B \cap \Gamma) + P(A \cap \Gamma)$
$- P((A \cap B) \cap (B \cap \Gamma)) - P((A \cap B) \cap (A \cap \Gamma)) - P((B \cap \Gamma) \cap (A \cap \Gamma))$
$+ P((A \cap B) \cap (B \cap \Gamma) \cap (A \cap \Gamma)) = P(A \cap B) + P(B \cap \Gamma) + P(A \cap \Gamma) - 2P(A \cap B \cap \Gamma)$
$= 0,2 + 0,23 + 0,43 - 2 \cdot 0,15 = 0,56 \rightarrow 56\%$

iii) Η πιθανότητα να συμβεί ακριβώς ένα από τα A, B, Γ, εκφράζεται ως $P(((A - (B \cup \Gamma)) \cup ((B - (A \cup \Gamma)) \cup ((\Gamma - (A \cup B)))$, με:

$P(((A - (B \cup \Gamma)) \cup ((B - (A \cup \Gamma)) \cup ((\Gamma - (A \cup B))) = P((A - (B \cup \Gamma)))$
$+ P((B - (A \cup \Gamma))) + P((\Gamma - (A \cup B))) - P(((A - (B \cup \Gamma)) \cap ((B - (A \cup \Gamma)))$
$- P(((B - (A \cup \Gamma)) \cap ((\Gamma - (A \cup B))) - P(((A - (B \cup \Gamma)) \cap ((\Gamma - (A \cup B)))$
$+ P(((A - (B \cup \Gamma)) \cap ((B - (A \cup \Gamma)) \cap ((\Gamma - (A \cup B)))^{(1)}$, με τα σύνολα:

1) $((A-(B\cup\Gamma))\cap((B-(A\cup\Gamma))$

2) $((B-(A\cup\Gamma))\cap((\Gamma-(A\cup B))$

3) $((A-(B\cup\Gamma))\cap((\Gamma-(A\cup B))$

4) $((A-(B\cup\Gamma))\cap((B-(A\cup\Gamma))\cap((\Gamma-(A\cup B))$

$= \phi$, άρα $P(1) = P(2) = P(3) = P(4) = 0$ (2)

Για το πρώτο (ομοίως και για τα υπόλοιπα τρία)

$x \in ((A-(B\cup\Gamma))\cap((B-(A\cup\Gamma)) \to (x\in A \wedge x\notin (B\cup\Gamma)) \wedge (x\in B \wedge x\notin (A\cup\Gamma))$

$\to (x\in A \wedge (x\notin B \wedge x\notin \Gamma)) \wedge (x\in B \wedge (x\notin A \wedge x\notin \Gamma)$

$\sim (x\in A \wedge x\notin B \wedge x\notin \Gamma) \wedge (x\in B \wedge x\notin A \wedge x\notin \Gamma)$

$\sim x\in A \wedge x\notin B \wedge x\notin \Gamma \wedge x\in B \wedge x\notin A \wedge x\notin \Gamma$

$\sim (x\in A \wedge x\notin A) \wedge (x\in B \wedge x\notin B) \wedge (x\in \Gamma \wedge x\notin \Gamma)$

$\sim \phi \wedge \phi \wedge \phi = \phi$.

Από (1), (2) $P(((A-(B\cup\Gamma))\cup((B-(A\cup\Gamma))\cup((\Gamma-(A\cup B)))$

$= P((A-(B\cup\Gamma))) + P((B-(A\cup\Gamma))) + P((\Gamma-(A\cup B)))$

$= P(A) - P(A\cap(B\cup\Gamma)) + P(B) - P(B\cap(A\cup\Gamma)) + P(\Gamma) - P(\Gamma\cap(A\cup B))$

$= P(A) - P((A\cap B)\cup(A\cap\Gamma)) + P(B) - P((A\cap B)\cup(B\cap\Gamma)) + P(\Gamma)$
$- P((A\cap\Gamma)\cup(B\cap\Gamma))$

$= P(A) + P(B) + P(\Gamma) - 2(P(A\cap B) + P(B\cap\Gamma) + P(A\cap\Gamma)) + 3P(A\cap B\cap\Gamma)$

$= 0{,}48 + 0{,}4 + 0{,}56 - 2(0{,}2 + 0{,}23 + 0{,}43) + 3\cdot 0{,}15 = 0{,}17 \sim 17\%$

iv) Η πιθανότητα να συμβούν ακριβώς δύο από τα A, B, Γ, εκφράζεται ως $P(((A\cap B)-\Gamma)\cup((B\cap\Gamma)-A)\cup((A\cap\Gamma)-B)))$, με

$$P(((A\cap B)-\Gamma)\cup((B\cap\Gamma)-A)\cup((A\cap\Gamma)-B))) = P((A\cap B)-\Gamma)$$
$$+P((B\cap\Gamma)-A)+P((A\cap\Gamma)-B)-P(((A\cap B)-\Gamma)\cap((B\cap\Gamma)-A)))$$
$$-P(((B\cap\Gamma)-A)\cap((A\cap\Gamma)-B)))-P(((A\cap B)-\Gamma)\cap((A\cap\Gamma)-B)))$$
$$+P(((A\cap B)-\Gamma)\cap((B\cap\Gamma)-A)\cap((A\cap\Gamma)-B)))^{(1)}$$ με τα σύνολα

1) $((A\cap B)-\Gamma)\cap((B\cap\Gamma)-A)$

2) $((B\cap\Gamma)-A)\cap((A\cap\Gamma)-B)$

3) $((A\cap B)-\Gamma)\cap((A\cap\Gamma)-B)$.

4) $((A\cap B)-\Gamma)\cap((B\cap\Gamma)-A)\cap((A\cap\Gamma)-B)$

$=\phi$, άρα $P(1)=P(2)=P(3)=P(4)=0$ (2)

Για το πρώτο (ομοίως και για τα υπόλοιπα τρία).

$$x\in((A\cap B)-\Gamma)\cap((B\cap\Gamma)-A) \sim (x\in(A\cap B)\wedge x\notin\Gamma)\wedge(x\in(B\cap\Gamma)\wedge x\notin A)$$
$$\sim(x\in A\wedge x\in B\wedge x\notin\Gamma)\wedge(x\in B\wedge x\in\Gamma\wedge x\notin A)$$
$$\sim x\in A\wedge x\in B\wedge x\notin\Gamma\wedge x\in B\wedge x\in\Gamma\wedge x\notin A$$
$$\sim(x\in A\wedge x\notin A)\wedge(x\in B)\wedge(x\in\Gamma\wedge x\notin\Gamma)$$
$$\sim\phi\wedge B\wedge\phi=\phi.$$

Από (1), (2) $P(((A\cap B)-\Gamma)\cup((B\cap\Gamma)-A)\cup((A\cap\Gamma)-B))) = P((A\cap B)-\Gamma)$ $+P((B\cap\Gamma)-A)+P((A\cap\Gamma)-B) = P(A\cap B)-P(A\cap B\cap\Gamma)+P(B\cap\Gamma)$ $-P(A\cap B\cap\Gamma)+P(A\cap\Gamma)-P(A\cap B\cap\Gamma) = P(A\cap B)+P(B\cap\Gamma)+P(A\cap\Gamma)$ $-3P(A\cap B\cap\Gamma) = 0{,}2+0{,}23+0{,}43-3\cdot0{,}15 = 0{,}41 = 41\%$

Β] Αν τα ενδεχόμενα A_1, A_2, A_3 είναι ανεξάρτητα, να δείξεις ότι και τα A_1^c, A_2^c, A_3^c είναι ανεξάρτητα.

Λύση

Ας είναι A_1, A_2, A_3 ανεξάρτητα ενδεχόμενα.

Θα είναι:

$$P(A_1 \cap A_2) = P(A_1) \cdot P(A_2)$$
$$P(A_2 \cap A_3) = P(A_2) \cdot P(A_3)$$
$$P(A_1 \cap A_3) = P(A_1) \cdot P(A_3)$$
$$P(A_1 \cap A_2 \cap A_3) = P(A_1) \cdot P(A_2) \cdot P(A_3)$$

Έχω: (Έχοντας θεωρήσει βασικό σύνολο Ω).

Έστω $x \in (A_1^c \cap A_2^c \cap A_3^c) \sim x \in A_1^c \wedge x \in A_2^c \wedge x \in A_3^c$

$\sim x \notin A_1 \wedge x \notin A_2 \wedge x \notin A_3 \sim x \notin (A_1 \cup A_2 A_3)$

$\sim x \in (\Omega - (A_1 \cup A_2 \cup A_3)) \sim x \in (A_1 \cup A_2 \cup A_3)^c$,

άρα $(A_1^c \cap A_2^c \cap A_3^c) = (A_1 \cup A_2 \cup A_3)^c$

Εξετάζω την $P(A_1^c \cap A_2^c)$, κι έχω ότι:

$P(A_1^c \cap A_2^c) = P((A_1 \cup A_2)^c) = 1 - P(A_1 \cup A_2) \underset{\text{ανεξάρτητα}}{\overset{A_1, A_2}{=\!=\!=\!=}}$

$1 - (P(A_1) + P(A_2) - P(A_1) \cdot P(A_2)) = (1 - P(A_1)) \cdot (1 - P(A_2))$

$= P(A_1^c) \cdot P(A_2^c)$. Άρα $P(A_1^c \cap A_2^c) = P(A_1^c) \cdot P(A_2^c)$ (1)

Εξετάζω την $P(A_2^c \cap A_3^c)$, κι έχω ότι:

$P(A_2^c \cap A_3^c) = P((A_2 \cup A_3)^c) = 1 - P(A_2 \cup A_3) \underset{\text{ανεξάρτητα}}{\overset{A_2, A_3}{=\!=\!=\!=}}$, οπότε

ομοίως με προηγουμένως έχω ότι $P(A_2^c \cap A_3^c) = P(A_2^c) \cdot P(A_3^c)$ (2)

Ομοίως έχω ότι $P(A_1^c \cap A_3^c) = P(A_1^c) \cdot P(A_3^c)$ (3).

Εξετάζω την $P(A_1^c \cap A_2^c \cap A_3^c)$, κι έχω

$$P(A_1^c \cap A_2^c \cap A_3^c) = P((A_1 \cup A_2 \cup A_3)^c) = 1 - P(A_1 \cup A_2 \cup A_3)$$

$$\overset{A_1, A_2, A_3}{\underset{\text{ανεξάρτητα}}{=}} 1 - \big(P(A_1) + P(A_2) + P(A_3) - P(A_1) \cdot P(A_2) - P(A_2) \cdot P(A_3)$$

$$- P(A_1) \cdot P(A_3) + P(A_1) \cdot P(A_2) \cdot P(A_3) \big) = (1 - P(A_1)) \cdot (1 - P(A_2)) \cdot (1 - P(A_3))$$

$$= P(A_1^c) \cdot P(A_2^c) \cdot P(A_3^c) \quad (4).$$

Από (1), (2), (3), (4) έχω ότι A_1^c, A_2^c, A_3^c είναι ανεξάρτητα

2. (α) Λύση: Έστω τα ενδεχόμενα $K = \{$το σφαιρίδιο είναι κίτρινο$\}$, $\Lambda = \{$το σφαιρίδιο είναι λευκό$\}$,
$M^c = \{$το σφαιρίδιο δεν είναι μαύρο$\}$
Ζητώ τη δεσμευμένη πιθανότητα $P(K|M^c)$
Έχω ότι

$$P(K|M^c) = P(K|(K\cup\Lambda))$$

$$= \frac{P(K\cap(K\cup\Lambda))}{P(K\cup\Lambda)} = \frac{P((K\cap K)\cup\overbrace{(K\cap\Lambda)}^{\emptyset})}{P(K\cup\Lambda)} = \frac{P(K\cap K)}{P(K\cup\Lambda)}$$

$$= \frac{P(K)}{P(K)+P(\Lambda)+\underbrace{P(K\cap\Lambda)}_{\emptyset}} = \frac{P(K)}{P(K)+P(\Lambda)} = \frac{5/25}{15/25} = \frac{1}{3}$$

(β) Λύση: 26 χαρτιά έχουν ήδη μοιραστεί, μεταξύ των οποίων 8 καρώ, οπότε όσον αφορά τον τρίτο παίκτη, μπορεί να επιλέξει τα 13 από τα 26 εναπομείναντα χαρτιά. Ακόμη μπορεί να επιλέξει μεταξύ αυτών 3 καρώ από τα εναπομείναντα 5 καρώ χαρτιά.
Έτσι, η ζητούμενη πιθανότητα ισούται με:

$$\frac{\binom{5}{3}\cdot\binom{21}{10}}{\binom{26}{13}} = 0{,}3391\ldots = \frac{39}{115}$$

γ) <u>Λύση</u> : Πρόκειται για τοποθέτηση σε σειρά σε γραμμή n ανακειμένων ($n=7$), όμοια κατά ομάδες κόκκινου - άσπρου, με πλήθος ομάδας κόκκινου ίσο με 3 και πλήθος ομάδας άσπρου ίσο με 4

Με χρήση του πολυωνυμικού συντελεστή $(n, k_1, k_2) = (7, 4, 3)$, έχω ότι: $\binom{7}{4,3} = \frac{7!}{4!3!} = 35$ τρόποι τοποθέτησης (1).

Αρκεί επομένως, αφού υπολόγισα το πλήθος των δυνατών τοποθετήσεων τοποθετήσεων, να υπολογίσω το πλήθος των δυνατών τοποθετήσεων στις οποίες η τρίτη στη σειρά μπάλα είναι άσπρη.

Τοποθετώ τη μια εκ των 4ρων άσπρων μπαλών στην τρίτη θέση και έχω πλέον να υπολογίσω το δυνατό πλήθος τοποθετήσεων $7-1=6$ μπαλών σε $7-1=6$ θέσεις.

Πλέον έχω $4-1=3$ άσπρες μπάλες και 3 κόκκινες μπάλες, σε σύνολο 6 μπαλών.

Με χρήση του πολυωνυμικού συντελεστή $(n-1, k_1-1, k_2) = (6, 3, 3)$, έχω ότι: $\binom{6}{3,3} = \frac{6!}{3!3!} = 20$ τρόποι τοποθέτησης (2)

Τελικά από (1), (2) η ζητούμενη πιθανότητα ισούται με

$$\frac{20}{35} = \frac{4}{7}$$

Λύση

3. (α) Έστω τα ενδεχόμενα: $A = \{$τουλάχιστον ένα εκ των δυο είναι αγόρι$\}$, $B = \{$το δεύτερο είναι αγόρι$\}$

Με χρήση του πολλαπλασιαστικού τύπου, θα είναι:

$P(A \cap B) = P(B|A)\, P(A)$, με:

$P(A)$ την πιθανότητα τουλάχιστον ένα από τα δυο παιδιά να είναι αγόρι. Με δειγματικό χώρο $S_1 = \{AA, AK, KK\}$, έχω ότι $P(A) = \dfrac{\|A\|}{\|S\|} = \dfrac{2}{3}$. (1)

Αφού το πρώτο παιδί με πιθανότητα $\frac{2}{3}$ είναι αγόρι, για το δεύτερο παιδί απομένουν πλέον δυο επιλογές, αγόρι ή κορίτσι. Άρα, ο νέος δειγματικός χώρος θα είναι ο $S_2 = \{A, K\}$, οπότε $P(B|A) = \dfrac{\|A\|}{\|S_2\|} = \dfrac{1}{2}$ (2)

Τελικά από (1), (2) έχω ότι $P(A \cap B) = \dfrac{2}{3} \cdot \dfrac{1}{2} = \dfrac{1}{3}$

Λύση (β) Έστω τα ενδεχόμενα $A = \{1\eta$ μπάλα κόκκινη$\}$, $B = \{2\eta$ μπάλα κόκκινη$\}$. Με χρήση του πολλαπλασιαστικού τύπου, έχω ότι: $P(A \cap B) = P(B|A)\, P(A)$

$= \dfrac{7}{11} \cdot \dfrac{8}{12} = \dfrac{14}{33}$.

(γ) Λύση: (i) Έστω $A = \{\text{ατύχημα}\}$, $A_1 = \{\text{ανήκει στην 1η κατηγορία}\}$, $A_2 = \{\text{ανήκει στην 2η κατηγορία}\}$, $A_3 = \{\text{ανήκει στο 30\% του πληθυσμού}\}$, $A_4 = \{\text{ανήκει στο 70\% του πληθυσμού}\}$.

Από υπόθεση $A_1 = A_3$ και $A_2 = A_4$.

Με χρήση του θεωρήματος ολικής πιθανότητας, έχω ότι:

$$P(A) = P(A|A_1)P(A_1) + P(A|A_2)P(A_2)$$

$$= P(A|A_1)P(A_3) + P(A|A_2)P(A_4)$$

$$= 0{,}4 \cdot 0{,}3 + 0{,}2 \cdot 0{,}7 = 0{,}26 = 26\%$$

(ii) Με χρήση του θεωρήματος Bayes, έχω ότι:

$$P(A_1|A) = \frac{P(A|A_1)P(A_1)}{P(A)} \overset{(i)}{=} \frac{0{,}4 \cdot 0{,}3}{0{,}26} = \frac{0{,}12}{0{,}26} = \frac{12}{26}$$